

Exercice 1. (difficile) À faire après chaque cours

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

En classe, nous avons vu qu'à partir d'un groupe G , on peut construire une catégorie BG avec un seul objet \bullet , dont les morphismes sont $\text{Mor}_{BG}(\bullet, \bullet) = G$, où la composition est donnée par la multiplication du groupe.

Exercice 2. (facile) Étant donné G et H deux groupes. À quoi correspond la donnée d'un foncteur $BH \rightarrow BG$?

Exercice 3. (facile) Existe-t-il un foncteur $Z : Gr \rightarrow Gr$ tel que les objets (les groupes) soient envoyés sur leur centre (c-à-d: $Z : G \mapsto Z(G)$)?

Definition 0.1. Soit \mathcal{C} une catégorie et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans \mathcal{C} .

- f est un *monomorphisme* si pour tout objet Z et morphismes h, g :

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} X \xrightarrow{f} Y$$

tel que si $f \circ h = f \circ g$ alors $g = h$.

- De manière dual, f est un *épimorphisme* si pour tout Z et morphisme h, g :

$$X \xrightarrow{f} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Z$$

tel que si $h \circ f = g \circ f$, alors $h = g$.

Exercice 4. (facile) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans la catégorie Ens d'ensembles et de fonctions. Démontrez que:

- (1) f est un épimorphisme si et seulement si f est surjectif;
- (2) f est un monomorphisme si et seulement si f est injectif;

Exercice 5. (intermédiaire) Soit \mathcal{C} une catégorie. Étant donné le diagramme suivant dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Y' \\ f \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Démontrez que si le pushout existe, alors il est unique à isomorphisme près.

Remarque: Notez que même si le pushout ci-dessus est unique lorsque il existe, il y'a des exemples de catégories où certains diagrammes n'en possède pas.

Exercice 6. (difficile) Soit G un groupe, et considérons la catégorie **G-ens**. Un objet de **G-ens** est un G -ensemble, c'est à dire, un ensemble X doté d'une action de groupe $G \curvearrowright X$. Étant donné X, Y deux G -ensembles, un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans **G-ens** est un ensemble de fonctions f tel que:

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

pour tout $x \in X$ et $g \in G$.

- (1) Soit $F : \mathbf{G-ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur qui oublie vers la catégorie des ensembles. Établissez un foncteur adjoint à droite pour F . C'est à dire, définissez un foncteur $H : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{G-ens}$ tel que:

$$\text{Mor}_{\mathbf{Ens}}(F(X), Y) \cong \text{Mor}_{\mathbf{G-ens}}(X, H(Y))$$

pour tout ensembles Y et G -ensembles X .

- (2) Soit $\text{Triv} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{G-ens}$ le foncteur qui à un ensemble X associe le G -ensemble X doté de l'action trivial par G c-à-d: $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$. Construisez un foncteur adjoint à droite pour Triv .